

BAB IV FUNGSI KOMPLEKS

4.1. BILANGAN KOMPLEKS.

4.1.1. Notasi Bilangan Kompleks

Bermacam - macam notasi dari bilangan kompleks pada mulanya didefinisikan sebagai pasangan bilangan riil , misal (x, y) , namun secara umum notasi tunggal untuk bilangan kompleks digunakan lambang z . Bila bilangan kompleks $z = (x,y)$ digambarkan dengan salib sumbu tegak maka nilai x merupakan titik pada sumbu mendatar (disebut **sumbu Riil**) sedangkan nilai y merupakan titik pada sumbu tegak (disebut **sumbu Imajiner**).

Secara lengkap Notasi bilangan kompleks diberikan sebagai berikut :

a. Bentuk Pasangan Bilangan, $z = (x,y)$

Nilai x merupakan bagian riil dari z , dinotasikan dengan $x = \text{Re} (z)$ dan nilai y merupakan bagian imajiner dari z , dinotasikan dengan $y = \text{Im} (z)$.

Penjumlahan dan perkalian bilangan kompleks didefinisikan sebagai :

Misal $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$.

Maka $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$

$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1 y_2 , x_1y_2 + x_2 y_1)$

Contoh 4.1. Diketahui $z_1 = (2,-3)$; $z_2 = (5,-1)$; $z_3 = (-4,0)$

Hitung :

a. $2z_1 - z_2 + 3z_3$

b. $2z_1(-z_2 + 3z_3)$

c. $z_1z_2z_3$

Jawab :

a. $2z_1 - z_2 + 3z_3 = (4,-6) + (-5,1) + (-12,0) = (-13,-5)$

b. $2z_1(-z_2 + 3z_3) = (4,-6)(-17,1) = (-62,106)$

c. $z_1z_2z_3 = (2,-3)[(5,-1)(-4,0)] = (2,-3)(-20,4) = (-28,68)$

b. Bentuk, $z = x + iy$

Dari bentuk notasi (a) kita dapat menurunkan notasi baru menggunakan definisi penjumlahan dan perkalian bilangan kompleks di atas sehingga didapatkan notasi b, sebagai berikut : $(x , y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1) (y,0)$

Misal $(x,0) = x$, $(y,0) = y$ dan $i = (0,1)$. Maka $(x,y) = x + i y$.

Sedangkan $i^2 = i.i = (0,1) (0,1) = (-1,0) = -1$.

Modulus atau **nilai absolut** bilangan kompleks, $z = x + i y$ didefinisikan sebagai jarak antara z dengan pusat sumbu dan diberikan sebagai $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Misal $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$. Maka $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Beberapa sifat modulus dari bilangan kompleks diberikan sebagai berikut :

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (ketidaksamaan segitiga)
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Bilangan kompleks **konjugate (sekawan)** dari $z = x + i y$ didefinisikan sebagai bilangan kompleks yang didapatkan dari z bila dicerminkan terhadap sumbu riil dan diberikan : $\bar{z} = x - iy$

Sifat - sifat yang bersesuaian dengan sekawan diberikan sebagai berikut :

- $|z| = |\bar{z}|$
- $z\bar{z} = |z|^2$
- $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ dan $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2}$

Contoh 4.2. Hitung modulus dari $\frac{2 + 3i}{1 - i}$

Jawab :

Bagian riil dan bagian imajiner ditentukan terlebih dahulu dengan merasionalkan penyebut yaitu mengalikan dengan sekawannya.

$$\frac{2 + 3i}{1 - i} = \frac{1}{2}(2 + 3i)(1 + i) = \frac{-1}{2} + \frac{5}{2}i. \text{ Jadi } \left| \frac{2 + 3i}{1 - i} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{26}$$

c. Bentuk Polar / Trigonometri, $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$

Notasi di atas menyatakan bahwa $r = |z|$ dan θ : sudut yang dibentuk oleh z dengan sumbu riil positif. θ disebut **argumen** dari z , $\arg z = \arctan y/x$, ($-\pi < \theta \leq \pi$)

Contoh 4.3. Tentukan argumen dari : $\frac{2 + 3i}{1 - i}$

Jawab :

Dari contoh 4.2. bagian riil, $x = -1/2$ dan bagian imajiner, $y = 5/2$.

Argumen, $\theta = \tan^{-1}(-5)$ (di kuadran dua).

d. Bentuk Euler, $z = r e^{i\theta}$.

Notasi (d) diturunkan dari notasi (c) dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$e^{iq} = \cos q + i \sin q \quad (\text{Rumus Euler})$$

4.1.2. Pangkat dan Akar Bilangan Kompleks

Misal $z^n = r^n e^{in\theta}$. Maka dengan menggunakan rumus Euler didapatkan hubungan sebagai berikut : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ (**Rumus De Moivre**)

Oleh karena itu, bila $w = \sqrt[n]{z}$ maka $w = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$. Untuk k

$= 0$ maka $w = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right)$ disebut **nilai prinsipal**.

Untuk $n = 2$, yakni akar kuadrat dari bilangan kompleks dapat dicari menggunakan:

$$\sqrt{z} = \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}(|z|+x)} + (\text{sign } y)i\sqrt{\frac{1}{2}(|z|-x)} \right] \text{ dengan:}$$

$$\text{sign } y = \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases} \text{ dan } z = x + iy$$

Contoh 4.4. Carilah solusi persamaan $z^2 + (3+i)z + 3i = 0$

Jawab :

$$\text{Digunakan rumus, } z = \frac{1}{2} \left[-(3+i) \pm \sqrt{(3+i)^2 - 4(3i)} \right] = \frac{1}{2} \left[-(3+i) \pm \sqrt{8-6i} \right].$$

Sedangkan $\sqrt{8-6i} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(10+8)} - i\sqrt{\frac{1}{2}(10-8)} = \pm(3-i)$. Jadi, $z = 3$ atau $z = i$.

4.1.3. Daerah pada Bidang Kompleks

Misal diberikan titik (bilangan kompleks) tetap $z_0 = (x_0, y_0)$. Maka tempat kedudukan titik-titik (bilangan kompleks), $z = (x, y)$ yang berjarak R terhadap titik tetap diatas dapat ditentukan sebagai berikut :

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = |z - z_0|^2$$

Oleh karena itu, didapatkan : $|z - z_0| = R$ merupakan tempat kedudukan titik-titik yang berupa lingkaran dengan pusat $z_0 = (x_0, y_0)$ dan jari-jari R . Sedangkan $|z - z_0| < R$ adalah daerah di dalam lingkaran yang berpusat di z_0 dan jari-jari R dan seringkali dinamakan dengan **lingkaran buka atau lingkungan** dari z_0 . Sedangkan tempat kedudukan titik-titik yang memenuhi $r < |z - z_0| < R$ dikatakan **annulus** (cincin).

Dua daerah yang disebut terakhir merupakan **himpunan (daerah) buka**.

Daerah S disebut **tersambung** bila untuk sembarang dua titik di S dapat dihubungkan oleh sejumlah hingga ruas garis yang terletak di dalam S .

Domain dari fungsi kompleks adalah daerah yang buka dan tersambung.

Soal latihan

(Nomor 1 sd 4) Sederhanakan bentuk berikut :

1. $(\sqrt{2} - i) - i(1 - i\sqrt{2})$
2. $(2, -3) (-2, 1)$
3. $(3, 1) (3, -1) (1/5, 1/10)$
4. $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$

(Nomor 5 sd 8) Misal $z_1 = 4 - 5i$. dan $z_2 = 2 + 3i$. Hitung :

5. $z_1 z_2$
6. $3z_1 - 6z_2$
7. $(z_1 + z_2)^2$
8. $\frac{z_1}{z_1 + z_2}$

(Nomor 9 sd 12) Hitung : $|z_1 + z_2|$ dan $|z_1 - z_2|$ bila :

9. $z_1 = 2i$, $z_2 = 2/3 - i$
10. $z_1 = (-3, 1)$, $z_2 = (1, 4)$
11. $z_1 = (-\sqrt{3}, 1)$, $z_2 = (\sqrt{3}, 0)$
12. $z_1 = x + iy$, $z_2 = x - iy$

(Nomor 13 sd 22) Tentukan bagian riil dan imajiner dari :

13. $(2 + i) (-1 - i) (3 - 2i)$
14. $\frac{1}{1+i}$
15. $\frac{2+3i}{5+4i}$
16. $\frac{(2-3i)^2}{2+3i}$
17. $\frac{3\sqrt{2}+2i}{-\sqrt{2}-2i/3}$
18. $\frac{2+3i}{1+2i} - \frac{8+i}{6-i}$

19. $\left[\frac{2+i}{6i-(1-2i)} \right]^2$
20. $i^3 (i+1)^2$
21. z^2 .
22. z^3 .

(Nomor 23 sd 29) Tentukan besar r dan θ dari :

23. $z = 1 - i$.
24. $z = 6 - 6i$.
25. $\frac{i}{-2-2i}$
26. $\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$
27. $\frac{1+i}{1-i}$
28. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2+2i}$
29. $\frac{-\sqrt{7}(1+i)}{\sqrt{3}+i}$
30. $\frac{3\sqrt{2}+2i}{-\sqrt{2}-\frac{2i}{3}}$

(Nomor 31 sd 35) Hitung :

31. $\left| \frac{z+1}{z-1} \right|$
32. $\left| \frac{z+1}{z-1} \right|$
33. $\left| (1+i)(2-3i)(4i-3) \right|$
34. $\left| \frac{i(2+i)^2}{(1-i)^2} \right|$
35. $\left| \frac{(1+i)^6}{i^3(1+4i)^2} \right|$

36. Tentukan solusi untuk θ bila
 $|e^{i\theta} - 1| = 2$ dengan $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(Nomor 37 sd 43) Carilah solusi dari persamaan bilangan kompleks berikut :

37. $z^2 + 2z + 1 - i = 0$

38. $z^2 + (5+i)z + 8+i = 0$

39. $(z^2 + 1) + i(2z - 1) = 0$

40. $z^2 - (3-2i)z + 1 - 3i = 0$

41. $z^4 - 3(1+2i)z^2 - 8 + 6i = 0$

42. $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$

43. $(z+1)^5 = z^5$

(Nomor 43 sd 47) Hitunglah :

43. $(-1+i)^7$

44. $(1+i\sqrt{3})^{-10}$

45. $(1-i\sqrt{3})^{1/2}$

46. $(2i)^{1/3}$

47. $(-8-8i\sqrt{3})^{1/4}$

(Nomor 48 sd 56) Sketlah himpunan titik berikut dan tentukan mana yang merupakan domain

48. $|z - 1 + i| = 1$

49. $|z + i| \leq 3$

50. $|z + 1| > 2$

51. $|z - 2 + i| \leq 1$

52. $|2z + 3| > 4$

53. $\operatorname{Re}(\bar{z} - i) = 2$

54. $|2z - i| = 4$

55. $|\arg z| < \pi/4$

56. $\operatorname{Im} z > 1$

4.2. PERSAMAAN CAUCHY RIEMANN

Misal S adalah himpunan bilangan kompleks..Maka fungsi kompleks $f(z)$ merupakan pemetaan dari S ke S yang mengaitkan setiap unsur dari S (Domain) dengan tepat satu unsur di S (Range).

Secara khusus notasi untuk fungsi kompleks $f(z)$ dapat dibedakan menjadi :

- $f(z) = U(x,y) + i V(x,y), \quad \forall z \in S \quad \text{bila } z = x + iy$
- $f(z) = U(r,\theta) + i V(r,\theta), \quad \forall z \in S \quad \text{bila } z = r e^{i\theta}$.

$U(x,y)$ dan $U(r,\theta)$ merupakan bagian riil dari $f(z)$ dinotasikan dengan $\operatorname{Re} [f(z)]$, sedangkan $V(x,y)$ dan $V(r,\theta)$ merupakan bagian imajiner dari $f(z)$ dinotasikan dengan $\operatorname{Im} [f(z)]$.

4.2.1. Limit dan Kekontinuan

Pengertian dari limit dan kekontinuan dari fungsi kompleks secara umum diberikan berikut.

Misal $f(z)$ terdefinisi pada suatu lingkungan dari z_0 . Maka dikatakan limit dari $f(z)$ di z mendekati z_0 adalah w_0 dan dituliskan dengan

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

bila untuk sembarang bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan positif δ sehingga berlaku $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ untuk $0 < |z - z_0| < \delta$. Sedangkan fungsi $f(z)$ dikatakan kontinu di z_0 bila

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Dari definisi formal limit dan kekontinuan fungsi kompleks di atas dan melihat kenyataan bahwa fungsi kompleks mempunyai bagian riil dan imajiner yang masing-masing merupakan fungsi riil dengan dua peubah, maka keberadaan limit dan kekontinuan $f(z)$ ditentukan dari keberadaan limit dari bagian riil dan imajiner, seperti diperlihatkan berikut.

Misal $f(z) = U(x,y) + i V(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ dan $w_0 = u_0 + iv_0$. Maka $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ bila dan hanya bila

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} U(x,y) = u_0 \quad \text{dan} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} V(x,y) = v_0$$

Misal $f(z) = U(x,y) + i V(x,y)$. Maka $f(z)$ kontinu di $z_0 = (x_0, y_0)$ bila dan hanya bila $U(x,y)$ dan $V(x,y)$ kontinu di (x_0, y_0) .

Dalam perhitungan limit dan kekontinuan dari fungsi kompleks pada suatu titik yang diberikan, kita dihadapkan kepada perhitungan limit dari fungsi dua peubah. Misal diberikan fungsi $g(x,y)$ dan titik (a,b) . Maka limit $g(x,y)$ di titik tersebut dikatakan ada bila nilai fungsi tersebut tetap (sama) bila didekati oleh setiap lintasan yang melewati titik tersebut. Hal ini mengisyaratkan kepada kita bahwa perhitungan limit fungsi dua peubah sangatlah sulit. Untuk itu, walaupun pengertian dari limit kita gunakan untuk memberikan definisi turunan namun dalam perhitungan turunan fungsi kompleks kita berusaha untuk menghindari hal tersebut. Untuk lebih memperjelas berikut diberikan definisi turunan dan bagaimana menentukan nilai turunan fungsi kompleks di suatu titik.

4.2.2. Turunan

Turunan dari $f(z)$ di z_0 didefinisikan sebagai : $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

$f(z)$ disebut **diferensiabel** di z_0 bila limit ada.

Dalam perhitungan turunan fungsi kompleks $f(z)$ dapat dilihat dari berbagai bentuk notasi dari fungsi kompleks itu sendiri.

1. $f(z)$ dinyatakan sebagai fungsi dalam peubah z .

Misal fungsi kompleks $f(z)$ merupakan fungsi dalam peubah z . Maka perhitungan turunan dari $f(z)$ dilakukan menggunakan rumus turunan yang sudah kita kenal dalam fungsi riil, yaitu :

$$a. \frac{d(z^r)}{dz} = r z^{r-1}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{d(f(z) + g(z))}{dz} &= f'(z) + g'(z) \\ \text{c. } \frac{d(f(z)g(z))}{dz} &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\ \text{d. } \frac{d\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)}{dz} &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \end{aligned}$$

Contoh 4.5. Tentukan turunan pertama dari :

$$\text{a. } f(z) = \sqrt{z-i} (z^2 + 1)$$

$$\text{b. } f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - i}$$

Jawab :

$$\text{a. } f'(z) = \frac{z^2 + 1}{2\sqrt{z-i}} + 2z\sqrt{z-i}$$

$$\text{b. } f'(z) = \frac{2z(z^2 - i) - 2z(z^2 + 1)}{(z^2 - i)^2} = \frac{-2z(1+i)}{(z^2 - i)^2}$$

2. $f(z)$ dinyatakan dalam bentuk : $f(z) = U(x,y) + i V(x,y)$

Misal $f(z) = U(x,y) + i V(x,y)$ dan $f'(z)$ ada pada $z_0 = x_0 + i y_0$. Maka berlaku **Persamaan Cauchy Riemann (PCR)** yaitu :

$U_x(x_0, y_0) = V_y(x_0, y_0)$ & $U_y(x_0, y_0) = -V_x(x_0, y_0)$, dengan U_x dan U_y berturut-turut merupakan turunan parsial pertama terhadap x dan y . Kondisi sebaliknya juga berlaku, yaitu bila pada $f(z)$ berlaku PCR maka $f'(z_0)$ ada.

Dan $f'(z_0) = U_x(x_0, y_0) + iV_x(x_0, y_0)$

Contoh 4.6. Selidiki apakah fungsi berikut diferensiabel di titik yang diberikan ! Bila ya, hitung nilai turunannya.

$$\text{a. } f(z) = e^x e^{iy} \quad , z = i.$$

$$\text{b. } f(z) = e^{-x} e^{iy} \quad , z = i.$$

Jawab :

a. Pandang $f(z) = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$. Maka $U(x, y) = e^x \cos y$ dan $V(x, y) = e^x \sin y$ berlaku PCR untuk setiap nilai z (Buktikan). Jadi $f(z) = e^x e^{iy}$ diferensiabel di $z = i$.

- b. Pandang $f(z) = e^{-x} e^{iy} = e^{-x}(\cos y + i \sin y)$. Maka $U(x,y) = e^{-x} \cos y$ dan $V(x,y) = e^{-x} \sin y$ tidak berlaku PCR di $z = 1$ (Buktikan). Jadi $f(z) = e^{-x} e^{iy}$ tidak diferensiabel di $z = i$.

3. $f(z)$ dinyatakan dalam bentuk : $f(z) = U(r,\theta) + i V(r,\theta)$

Dalam koordinat polar, PCR dapat dinyatakan sebagai berikut :

Misal $f(z) = U(r,\theta) + i V(r,\theta)$. Maka PCR : $U_r = \frac{1}{r} V_\theta$ dan $\frac{1}{r} U_\theta = -V_r$.

Dan $f'(z) = e^{-i\theta}(U_r + iV_r)$

Contoh 4.7. Selidiki apakah $f(z) = 1 + r e^{-i\theta}$ diferensiabel di $z = 1$.

Jawab :

Pandang $f(z) = 1 + r e^{-i\theta} = 1 + r \cos \theta - i r \sin \theta$. Maka $U(r,\theta) = 1 + r \cos \theta$ dan $V(r,\theta) = -r \sin \theta$ tidak berlaku PCR di $z = 1$ ($r = 1$ dan $\theta = 0$) (buktikan). Jadi $f(z) = 1 + r e^{-i\theta}$ tidak diferensiabel di $z = 1$.

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 7) Nyatakan dalam bentuk $f(z) = U(x,y) + i V(x,y)$.

1. $f(z) = z^2$.
2. $f(z) = z^2 + z + 1$
3. $f(z) = \frac{z}{1+z}$
4. $f(z) = \frac{z+i}{z^2+1}$
5. $f(z) = \frac{2z^2+3}{|z-1|}$
6. $f(z) = 2z^3 - 3z$
7. $f(z) = z^2 + 4z - 1$

(Nomor 8 sd 10) Nyatakan dalam bentuk $f(z) = U(r,\theta) + i V(r,\theta)$.

8. $f(z) = z + \frac{1}{z}$

9. $f(z) = \frac{z}{1-z}$

10. $f(z) = z^2 + z + 1$

(Nomor 11 sd 13) Gambarkan range dari fungsi berikut.

11. $f(z) = z + 5, \operatorname{Re} z > 0$

12. $f(z) = z^2$ di kuadran pertama, $\operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0$.

13. $f(z) = \frac{1}{z}, 0 < |z| \leq 1$

(Nomor 13 sd 18) Cari turunan dari :

13. $f(z) = (z^2 + i)^3$

14. $f(z) = 6i(z^3 - 1)^4 (z^2 + iz)^{10}$

15. $f(z) = \frac{z^2 - 4}{z^2 + 1}$

16. $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$

17. $f(z) = \frac{z^2}{(z+i)^2}$

18. $f(z) = \frac{(z+2)^3}{(z^2+iz+1)^4}$

24. $\frac{1}{z-2+3i}$

25. $\frac{iz^3+2z}{z^2+1}$

26. $\frac{3z-1}{z^2+z+4}$

(Nomor 19 sd 23) Hitung $f'(z)$ pada z yang diketahui :

19. $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$; $z = -i$

20. $f(z) = \frac{1}{z^3}$; $z = 3i$

21. $f(z) = (z^2 - i)^2$; $z = 3 - 2i$

22. $f(z) = \frac{1+i}{z^4}$; $z = 2$

23. $f(z) = (2+iz)^6$; $z = 2i$

(Nomor 24 sd 26) Tentukan titik yang menyebabkan fungsi berikut tidak analitik.

(Nomor 27 sd 35) Selidiki apakah $f'(z)$ ada . Bila ada, tentukan $f'(z)$!

27. $f(z) = \bar{z}$

28. $f(z) = \frac{z}{z+2}$

29. $f(z) = 2x + ixy^2$

30. $f(z) = x^2 + y^2 + y - 2 + ix$

31. $f(z) = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + i \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$

32. $f(z) = e^{-x} e^{-iy}$

33. $f(z) = e^x e^{-iy}$

34. $f(z) = z - \bar{z}$

35. $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

4.3. FUNGSI ANALITIK

Misal D himpunan (daerah) buka. Maka fungsi $f(z)$ disebut **analitik pada D** bila $f'(z)$ ada untuk $\forall z \in D$ (atau $f(z)$ berlaku PCR untuk $\forall z \in D$). Fungsi $f(z)$ disebut **analitik di $z = z_0$** bila $f(z)$ analitik pada lingkungan dari z_0 (Lingkungan dari z_0 adalah lingkaran buka yang berpusat di z_0 dan berjari-jari r). Fungsi $f(z)$ disebut **entire** bila $f(z)$ analitik untuk $\forall z$ ($f(z)$ berlaku PCR untuk $\forall z$). Bila $f(z)$ gagal analitik di $z = z_0$ (atau $f(z)$ tidak berlaku PCR di $z = z_0$) maka z_0 disebut **titik singular** dari $f(z)$.

Contoh 4.8. a. Selidiki apakah fungsi $f(z) = x y - i x y$

b. Tentukan titik singular dari $f(z) = \frac{z^2+1}{z^3-2iz^2}$

Jawab :

- a. Pandang $U(x,y) = xy$ dan $V(x,y) = -xy$ tidak berlaku PCR untuk setiap nilai z , tetapi berlaku PCR di $z = 0$ sebab $U_x = y = -x = V_y$ dan $U_y = x = y = V_x$. Oleh karena itu, $f(z)$ bukan fungsi entire tetapi diferensiabel di $z = 0$.
- b. Pandang : $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3 - 2iz^2} = \frac{z^2 + 1}{z^2(z - 2i)}$. Titik singular dari fungsi rasional dapat ditentukan dari pembuat nol dari penyebut dengan syarat tidak ada faktor yang sama antara pembilang dan penyebut. Oleh karena itu, titik singular dari $f(z)$, yaitu : $z = 0$ dan $z = 2i$.

4.3.1. Fungsi Harmonik

Ada hubungan antara fungsi analitik $f(z)$ dengan bagian riil $U(x,y)$ dan bagian imajiner $V(x,y)$ seperti dijelaskan di atas yaitu berlaku PCR. Bila kita mempunyai fungsi dua peubah x dan y yang kita pandang sebagai bagian riil atau bagian imajiner dari $f(z)$ maka kita dapat menentukan fungsi $f(z)$ merupakan fungsi analitik bila berlaku keadaan khusus. Untuk itu, dikenalkan fungsi harmonik berikut.

Fungsi $H(x,y)$ disebut **fungsi harmonik** pada suatu domain bila pada domain tersebut berlaku persamaan laplace yaitu : $H_{xx}(x,y) + H_{yy}(x,y) = 0$, dengan H_{xx} dan H_{yy} berturut-turut merupakan turunan parsial kedua terhadap x dan y . Misal $U(x,y)$ dan $V(x,y)$ harmonik pada D dan berlaku PCR. Maka $V(x,y)$ disebut **konjugate (sekawan) harmonik** dari $U(x,y)$ atau sebaliknya.

Berikut diberikan sifat hubungan antara keanalitikan suatu fungsi dengan keharmonikan bagian riil dan imajiner fungsi tersebut :

1. Misal $f(z) = U(x,y) + i V(x,y)$ analitik pada domain D . Maka $U(x,y)$ dan $V(x,y)$ harmonik pada D .
2. Fungsi $f(z) = U(x,y) + i V(x,y)$ analitik pada D bila dan hanya bila $V(x,y)$ sekawan harmonik dari $U(x,y)$.

Contoh 4.9. Diketahui : $U(x,y) = x^2 - 2xy + ky^2$

Tentukan :

- a. Nilai k agar $U(x,y)$ merupakan fungsi harmonik
- b. Fungsi $V(x,y)$ agar $f(x,y) = U(x,y) + i V(x,y)$ merupakan fungsi analitik

Jawab :

- a. Pandang $0 = U_{xx} + U_{yy} = 2 + 2k$. Maka $k = -1$. Jadi $U(x,y) = x^2 - 2xy - y^2$ fungsi harmonik.

- b. $V(x,y)$ merupakan sekawan harmonik dari $U(x,y)$ dan berlaku PCR. Oleh karena itu,

$$V(x,y) = \int U_x dy = \int (2x - 2y) dy = 2xy - y^2 + C(x)$$

$$V_x = 2y + C'(x) = 2x + 2y = -U_y \quad \rightarrow \quad C(x) = \int 2x dx = x^2 + C$$

$$\text{Jadi } V(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 + C.$$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 12) Selidiki apakah fungsi berikut entire.

1. $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$
2. $f(z) = x^3 + 3xy^2 - 3x + i(y^3 + 3x^2y - 3y)$
3. $f(z) = 3x^2 + 2x - 3y^2 - 1 + i(6xy + 2y)$
4. $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$
5. $f(z) = e^{-y} e^{ix}$
6. $f(z) = z + \frac{1}{z}$
7. $f(z) = (z^2 - 2) e^{-x} e^{-iy}$
8. $f(z) = \frac{1}{1 - z^4}$
9. $f(z) = xy + iy$
10. $f(z) = e^x (\sin y - i \cos y)$
11. $f(z) = e^y e^{ix}$
12. $f(z) = e^{x^2 - y^2} (\cos 2xy + i \sin 2xy)$

(Nomor 13 sd 15) Tentukan titik singular dari fungsi berikut :

13. $f(z) = \frac{2z + 1}{z(z^2 + 1)}$
14. $f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z + 2)(z^2 + 2z + 3)}$
15. $f(z) = \frac{z^3 + i}{z^2 - 3z + 2}$

(Nomor 16 sd 23) Tunjukkan bahwa $U(x,y)$ harmonik dan tentukan sekawan harmonik $V(x,y)$ bila :

16. $U(x,y) = 2x(1 - y)$
17. $U(x,y) = xy - x + y$
18. $U(x,y) = \sinh x \sin y$
19. $U(x,y) = \sin x \cosh y$
20. $U(x,y) = x^3 - 3xy^2$
21. $U(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$
22. $U(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
23. $U(x,y) = \ln |z|$

(Nomor 24 sd 26) Tentukan k agar fungsi berikut harmonik dan carilah sekawannya.

24. $U(x,y) = e^{2x} \cos ky$
25. $U(x,y) = \cos kx \cosh y$
26. $U(x,y) = \sin x \cosh ky$

(Nomor 27 sd 30) Carilah fungsi analitik $f(z) = U(x,y) + i V(x,y)$, sehingga :

27. $V(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$
28. $U(x,y) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$
29. $U(x,y) = \cos x \cosh y$
30. $U(x,y) = x^2 - 2xy - y^2$

4.4. BEBERAPA FUNGSI ELEMENTER

4.4.1. Fungsi Eksponen

Bentuk : $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ bila $z = x + iy$.

Sifat :

1. $f(z) \neq 0, \forall z$
2. $f(z)$ merupakan fungsi entire dengan $f'(z) = e^z \forall z$
3. Pandang bahwa fungsi cosinus dan sinus merupakan fungsi periodik dengan periode, $p = 2\pi$. Maka fungsi eksponen $f(z) = e^z$ juga merupakan fungsi periodik. Besarnya periode ditentukan berikut.

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x(\cos(y + 2p) + i \sin(y + 2p)) = e^{x+(y+2p)i} = e^{z+2pi}$$

Jadi $f(z)$ periodik dengan $p = 2\pi i$.

4. Misal $e^{z_1} = e^{z_2}$ atau $e^z = e^{z_1 - z_2} = 1$. Bila $z = x + iy$ maka $|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x = 1$.

Oleh karena itu, $x = 0$ dan ini berarti bahwa $e^z = e^{iy} = \cos y + i \sin y = 1$ atau ekuivalen dengan $\cos y = 1, \sin y = 0$. Nilai y yang memenuhi kedua persamaan tersebut adalah $y = 2k\pi$ dengan k bilangan bulat. Jadi $z = 2k\pi i$ atau $z_1 = z_2 + 2k\pi i$.

4.4.2. Fungsi Trigonometri dan Fungsi Hiperbolik

$$\text{Bentuk : } f(z) = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \text{ dan } f(z) = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$f(z) = \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \text{ dan } f(z) = \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

Hubungan antara fungsi trigonometri dan hfungsi hiperbolik diberikan sebagai berikut:

- $\cosh iz = \cos z$ & $\sinh iz = i \sin z$
- $\cos iz = \cosh z$ & $\sin iz = i \sinh z$
- $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$
- $\sin z = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$
- $\cosh z = \cosh x \cos y - i \sinh x \sin y$
- $\sinh z = \sinh x \cos y - i \cosh x \sin y$
- $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$.
- $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ & $\cos^2 z - \sin^2 z = \cos 2z$
- $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ & $\cosh^2 z + \sinh^2 z = \cosh 2z$

4.4.3. Fungsi Logaritma

Bentuk : $f(z) = \ln z$. Bila $z = r e^{i\theta}$ maka $\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$. Untuk $k = 0$ atau $-\pi < \theta \leq \pi$, maka $\ln z = \ln r + i\theta$ disebut **nilai prinsip** dari z .

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 3) Tentukan bagian riil dan imajiner dari :

1. e^{-z^2}
2. e^{z^3}
3. $e^{-p z}$

(Nomor 4 sd 8) Nyatakan dalam bentuk $u + i v$ dari :

4. $e^z ; z = \frac{7pi}{2}$
5. $\cosh (-2 + 3i)$
6. $e^z ; z = 2 + 5pi$
7. $\sinh (2 + i)$
8. $\sin (3 + 2i)$

(Nomor 9 sd 11) Carilah nilai dari z sehingga :

9. e^z adalah riil
10. $\operatorname{Re} e^{2z} = 0$
11. $\overline{e^z} = e^z$

(Nomor 12 sd 21) Selesaikan persamaan berikut :

12. $e^{3z} = 3$
13. $\sin z = \cosh z$
14. $e^z = -3 + 4i$
15. $\ln z = -2 - 3i/2$
16. $\cosh z = 0$
17. $\ln z = \left(2 - \frac{1}{2}i\right)p$
18. $\sin z = 1000$
19. $\ln z = \sqrt{2} + pi$
20. $\ln(z^2 - 1) = \frac{ip}{2}$
21. $e^{2z} + e^z + 1 = 0$

(Nomor 22 sd 25) Hitung nilai prinsip dari $\ln z$ bila $z =$

22. $-3 - 4i$.
23. -4
24. $1 + i$.
25. $0,6 + 0,8 i$

Daftar Pustaka.

1. E B Saff, A D snider, *Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science and Engineering*, Prentice Hall Inc, USA, 1976. (Hal 1 sd 88)
- 2.